SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

Franco Nardini

FASE DI BERRY: IL CASO DEL CAMPO ELETTRICO ROTANTE

27 febbraio 1992

INTRODUZIONE

Nella prima parte del presente seminario si richiama il problema dell'evoluzione adiabatica nella meccanica quantistica e si riassumono i principali risultati riguardanti la fase di Berry, definita come olonomia della connessione di Bott e Chern sul fibrato degli autospazi.

Nella seconda parte si mostra come si poò utilizzare tale definizione per estendere il concetto di fase di Berry al caso delle risonanze e si propone poi l'esempio del suo calcolo nel caso di un atomo d'idrogeno immerso in un campo elettrico d' intensità costante che ruota uniformemente.

1 TEOREMA ADIABATICO, OLONOMIA, FASE DI BERRY

2-1 Teorema adiabatico quantistico

Consideriamo un sistema meccanico quantistico con n gradi di libertà, dipendente da l parametri $r = (r_1, \dots, r_l)$ che possono variare su di una varietà l-dimensionale M ($l \geq 2$). Supponiamo che la sua Hamiltoniana $H(r)$ sia una funzione sufficientemente regolare del parametro r nel senso della norma del risolvente, che sia autoaggiunto ed inferiormente limitato per ogni $r \in M$ ed infine che il suo dominio sia D indipendentemente da r.

Supponiamo che il parametro r vari lentamente nel tempo e che descriva una curva regolare chiusa C nella varietà M di equazione

$$r = r(\varepsilon t) \quad t \in \left[0, \frac{T}{\varepsilon}\right] \quad \text{and } r(0) = r(T)\ ,$$

essendo $\varepsilon > 0$ piccolo e $T > 0$ fissato (grande).

Allora l'evoluzione del sistema quantistico retto dalla Hamiltoniana dipendente dal tempo $H(r(\varepsilon t))$ è data da un noto teorema di Kato e Tanabe (see Yoshida (1966))

Teorema 1.1 (Kato) *Sotto le ipotesi precedentemente enunciate sulla famiglia $H(r)$, posto $s = \varepsilon t$ ed $H(s) = H(r(\varepsilon t))$, il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} i\hbar \dfrac{\partial U_\varepsilon}{\partial s}(s, s') & = \frac{1}{\varepsilon} H(s) U_\varepsilon(s, s') \\ U_\varepsilon(s', s') & = \mathcal{I} \end{cases} . \tag{1.1}$$

ha un'unica soluzione $U_\varepsilon(s, s')$; $U_\varepsilon(s, s')$ è una famiglia di operatori unitari, fortemente continua per $s > s'$ e tale che la funzione $s \to U_\varepsilon(s, s')u_0$ è di classe $C^{(1)}$ per ogni $u_0 \in D$.

Consideriamo ora un insieme finito di autovalori $E(r)$ di $H(r)$ che siano isolati e di molteplicità finita per ogni $r \in M$; allora le proprietà di regolarità della famiglia $H(r)$ si trasmettono agli autovalori $E(r)$ che quindi risultano funzioni regolari di r. Anche l'autoproiezione totale

$$P(r) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma (z - H(r))^{-1} dz \tag{1.2}$$

dipende con regolarità da r (nel senso della norma degli operatori) ed ha dimensione costante: qui Γ indica una curva regolare semplice che racchiude gli autovalori ed è orientara in senso antiorario.

Come nel caso indipendente dal tempo ($\varepsilon = 0$) uno stato iniziale ψ_0 del sistema appartenente a $Ran(P(r(0)))$ si evolve rimanendo nel medesimo autospazio per ogni t, così, quanto più lenta è la variazione dei parametri $r(t)$ (cioè quanto più piccolo è ε), tanto più sarà approssimativamente vero che

$$U_\varepsilon(s_0, 0)\psi_0 \in Ran\,(P(r(s)) \quad \forall s \geq 0\,.$$

Questo è il contenuto del teorema adiabatico quantistico provato da Kato nel 1950 nel caso di un autovalore singolo ed esteso da Avron, Seiler, Jaffe (1987) al caso di più autovalori o di una banda spettrale

Teorema 1.2. (Kato (1950)) *Ancora sotto le medesime ipotesi sulla famiglia $H(r)$, se poniamo $P(s) = P(r(\varepsilon t))$, otteniamo*

$$U_\varepsilon(s)P(0) = P(s)U_\varepsilon(s) + O(\varepsilon) \tag{1.3}$$

per $\varepsilon \to 0 \quad \forall s \in [0, T]$.

1-2 Evoluzione adiabatica

Motivato dal precedente risultato, Kato ha introdotto anche una seconda famiglia di operatori unitari $U_A(s, s', P)$ che da un lato sono quanto più possibile vicini all'operatore d'evoluzione del sistema $U_\varepsilon(s, s')$ e dall'altro soddisfano (1.3) senza il resto $O(\varepsilon)$. Per questo Kato ha introdotto il cosidetto generatore dell'evoluzione adiabatica

$$H_A(s, P) = H(s) + \varepsilon i\,[P'(s), P(s)]\ . \tag{1.4}$$

Tale operatore genera un propagatore che conserva gli autospazi dell'operatore $H(s)$ nel senso del seguente teorema.

Teorema 1.3. (Avron, Seiler, Jaffe (1987)) *Sotto le stesse ipotesi dei due teoremi precedenti, l'equazione d'evoluzione*

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial U_A(s,P)}{\partial s} & = \frac{1}{\varepsilon}H_A(s,P)U_A(s,P) \\ U_A(0,P) & = \mathcal{I} \end{cases} \tag{1.5}$$

ha soluzione $U_A(s, P)$, essa risulta unitaria per ogni s e fortemente continua in s; $U_A(s, P)$ trasforma D in D e per ogni $u_0 \in D$ la funzione $s \to U_A(s, P)u_0$ è differenziabile con continuità. Inoltre

$$U_A(s, P)P(0) = P(s)U_A(s, P)\ . \tag{1.6}$$

Dimostrazione. Si veda Avron, Seiler, Jaffe (1987) p.38.

Si può provare che l'evoluzione adiabatica $U_A(s, P)$ approssima l'evoluzione vera $U_\varepsilon(s)$ procedendo come nella teoria della diffusione; per questo poniamo

$$\Omega(s) := U_A^*(s, P)U_\varepsilon(s)\ .$$

Allora vale il seguente risultato.

Teorema 1.4. *Ancora sotto le medesime ipotesi dei precedenti teoremi, per ogni $k \in \mathbf{N}$ risulta*

$$\Omega(s) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \Omega_j(s) + O(\varepsilon^{k+1}) \quad ,$$

ove $\Omega(s)$, $j = 1, 2, \dots, k$, sono operatori limitati e

$$\max_{s\in[0,T]} \|\Omega_j(s)\| = O(\varepsilon^j) \ , \forall j \geq 0$$

per $\varepsilon \to 0$.

Dimostrazione. See Avron, Seiler, Jaffe (1987) p.39.

Osservazione. Consideriamo il caso di un singolo autovalore $E(r)$ isolato e di molteplicità finita $\forall r \in M$; allora

$$H_A(s, P) = E(s)P(s) + i\varepsilon\,[P'(s), P(s)]$$

e l'addendo $E(s)P(s)$ può essere facilmente eliminato scegliendo opportunamente il fattore di fase; dunque in questo caso il generatore dell'evoluzione adiabatica è

$$H_K(s, P) = i\varepsilon\,[P'(s), P(s)] \ , \tag{1.7}$$

questo è l'operatore originariamente introdotto da Kato.

1-3 Interpretazione geometrica

Consideriamo ora il fibrato vettoriale $\{(r, Ran(P(r))) : r \in M\}$ di base M allora la curva $(r(s), U_A(s, P)u_0)$, $s \in [0, T]$ definisce il rilevamento (lift) orizzontale della curva $r(s)$, $s \in [0, T]$, nella base M, con punto iniziale $(r(0), u_0)$; resta così definita una connessione in detto fibrato, nota come connessione di Berry e l'equazione (1.6) diviene, in questo contesto, l'equazione del trasporto parallelo nel fibrato in questione.

In particolare l'operatore unitario $U_A(T, P)$ trasforma $Ran(P(s))$ in sè ed è un elemento del gruppo d'olonomia della connessione di Berry. Se indichiamo con m la molteplicità dell'autovalore $E(r(0))$ ($m = dim(P(0))$), allora $U_A(T, P)$ è una matrice unitaria $m \times m$ in $\mathbf{C}$ che viene detta olonomia di Berry; nel caso $m = 1$ tale matrice si riduce ad una moltiplicazione per $e^{i\phi_C(T)}$ con $\phi_C \in \mathbf{R}$ e l'angolo ϕ_C si dice fase di Berry.

2-OLONOMIA DI BERRY PER LA HAMILTONIANA DELL'EFETTO STARK

2-1 Effetto Stark e risonanze

Consideriamo la Hamiltoniana di un atomo d'idrogeno in un campo eletrico uniforme con direzione $r = (0, r_2, r_3)$ ed intensità $|r|$

$$H(r) = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta_x - \frac{Z}{|x|} + (r_2 x_2 + r_3 x_3) \quad \text{in} \quad L^2(\mathbf{R}^2)\,. \tag{2.1}$$

È noto che gli autovalori di $H(0)$ scompaiono non appena $r \neq 0$ e che $H(r)$ non ha alcun autovalore, ma il suo spettro è assolutamente continuo. Tuttavia, quando l'intensità $|r|$ del campo elettrico è piccola, gli autovalori di $H(0)$ si trasformano in risonanze di $H(r)$ ed i corrispondenti autostati si trasformano in stati a vita lunga.

È noto inoltre che (Graffi-Grecchi (1978), Herbst(1978), vedi anche Hunziker (1979) e Herbst (1982)) tali risonanze sono gli autovalori di un operatore non autoaggiunto: precisamente si consideri l'operatore di dilatazione

$$\big(\mathcal{U}(\theta)\phi\big)(x) := e^{\frac{3}{2}\theta}\phi(e^{\theta}x)\ ; \tag{2.2}$$

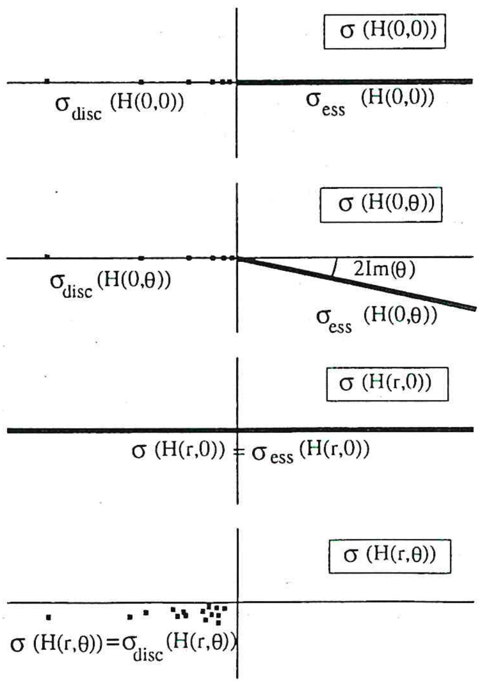
$\mathcal{U}(\theta)$ è un operatore unitario in $L^2(\mathbf{R}^{\,3}, d^3x)$ per ogni $\theta \in \mathbf{R}$; d'altra parte la Hamiltoniana

$$H(r,\theta) := \mathcal{U}(\theta)H(r)\mathcal{U}(\theta)^{-1} \tag{2.3}$$

è definita anche per $\theta \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$; se $r = (F, 0, 0)$ e

$$\varepsilon < 3Im(\theta) + \arg(F) \leq \pi - \varepsilon \text{ e } \varepsilon < Im(\theta) + \arg(F) < \pi - \varepsilon$$

il suo spettro è puramente discreto e tutti gli autovalori (isolati e di molteplicità finita) sono stabili nel senso di Kato ((1966) ch.VIII 1.4) rispetto alla famiglia di opeatori $H(r,\theta)$ quando $r \to 0$. Inoltre l'intero spettro di $H(r,\theta)$ e lo spettro discreto di $H(0,\theta)$ sono indipendenti da $\theta \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ mentre gli autovalori di $H(r,\theta), \theta \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ sono le risonanze di $H(r,0)$. Ciò può essere provato con le tecniche di Aguilar-Combes (1971) and Balslev-Combes (1971).



Il problema di determinare l'olonomia di Berry in questo caso sorge dall'osservazione che nel corrispondente problema classico si possono determinare gli angoli di Hannay (si veda l'appendice in Caliceti Marmi Nardini (1992) ed anche Golin Knauf Marmi(1989), Golin Marmi (1989), (1990)); è noto inoltre che, nel caso di un sistema classicamente integrabile, gli angoli di Hannay sono il limite semiclassico dell'olonomia di Berry (si vedano Gerard Robert (1989) e Asch (1990)). Poichè gli angoli di Hannay sono nulli ci si chiede se tale sia anche la fase di Berry o se invece si presentino correzioni quantistiche non nulle.

2-2 Una formula per l'olonomia di Berry

Per quanto detto, nel nostro caso gli autovalori di $H(r,\theta)$, che sono le autofunzioni di risonanza di $H(r)$, sono la naturale controparte delle autofunzioni ordinarie relative ad autovalori isolati e di molteplicità finita del caso standard. Fissata pertanto una singola risonanza dell'operatore $H(r)$ (che è un autovalore di $H(r,\theta)$), consideriamo il fibrato vettoriale la cui fibra nel punto $r = (r_1, r_2)$ è data dal codominio dell'autoproiezione $P(r,\theta)$ dell'operatore $H(r,\theta)$; è ben noto (Landau-Lifschitz (1966) sect 76 and 77) che tale autovalore ha molteplicità 2.

Consideriamo ora la curva $r = r(s)$; è facile scrivere l'equazione del trasporto parellelo che nel caso presente tiene il posto di (1.6)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U(s,\theta)}{\partial s} &= \left[\dfrac{\partial P}{\partial s}(s,\theta), P(s,\theta\right] U(s,\theta) \\ U(0,\theta) &= \mathcal{I} \end{cases}, \tag{2.4}$$

dove il generatore dell'evoluzione adiabatica (cfr. 1.7)) è ora

$$H_K(s,\theta) = i\varepsilon\left[\frac{\partial P}{\partial s}(s;\theta), P(s,\theta\right] , \tag{2.5}$$

and $P(s,\theta) = P(r(s),\theta)$.

Poichè siamo interessati ad una curva semplice chiusa che racchiuda l'origine consideriamo la circonferenza

$$\begin{aligned} r_2 = r_2(s) = 2F\sin(s) \ , \\ r_3 = r_3(s) = 2F\cos(s) \ ; \end{aligned} \quad s \in [0, 2\pi] \tag{2.6}$$

e quindi tratteremo il caso in cui un campo elettrico di intensità costante $2F = |r| = |r(s)|$ ruota uniformemente intorno all'origine nel piano yz. L'analogo del teorema 1.3 è ora il seguente.

Teorema 2.1. *La soluzione $U(s,\theta)$ dell'equazione (2.4) esiste e per ogni coppia di autostati $\psi(\theta)$, $\phi(\theta)$ del codominio di $P(0,\theta)$ risulta*

$$\langle U(s,\bar\theta)\psi(\bar\theta), U(s,\theta)\phi(\theta)\rangle = \langle \psi(\bar\theta), \phi(\theta)\rangle. \tag{2.7}$$

Inoltre essa soddisfa la seguente analoga della proprietà (1.7)

$$P(s,\theta)U(s,\theta) = U(s,\theta)P(0,\theta) \ . \tag{2.8}$$

Osservazione. L'esistenza non è ovvia perchè l'operatore $H_K(s,\theta)$ non è autoaggiunto: in particolare $U(s,\theta)$ non è unitario, ma la proprietà (2.7) sostituisce l'unitarietà nel caso presente.

Dimostrazione. Iniziamo la dimostrazione con la prova della proprietà (2.8). Evidentemente la funzione $s \longrightarrow U(s,\theta)P(O,\theta)$ è soluzione del problema di Cauchy (2.4) con condizione iniziale $P(0,\theta)$, ma questo vale anche per la funzione $s \longrightarrow P(s,\theta)U(s,\theta)$. Infatti, tenendo presente che lo è la funzione $s \longrightarrow U(s,\theta)$ ed utilizzando

$$P\frac{dP}{ds}P = 0 \text{ e } \frac{dP}{ds} = \frac{dP}{ds}P + P\frac{dP}{ds}$$

(queste si deducono dalla proprietà $P = P^2$ della proiezione P), otteniamo

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial s}\left(P(s,\theta)U(s,\theta)\right) = \frac{dP}{ds}(s,\theta)U(s,\theta) \\
&+P(s,\theta)\left(\frac{dP}{ds}(s,\theta)P(s,\theta) - P(s,\theta)\frac{dP}{ds}(s,\theta)\right) U(s,\theta) \\
&=\frac{dP}{ds}(s,\theta)P(s,\theta)U(s,\theta) + P(s,\theta) \\
&=P(s,\theta)\frac{dP}{ds}(s,\theta)U(s,\theta) - P(s,\theta)\frac{dP}{ds}(s,\theta)U(s,\theta) \\
&-P(s,\theta)\frac{dP}{ds}(s,\theta)P(s,\theta)U(s,\theta) \\
&=\left[\frac{dP}{ds}(s,\theta), P(s,\theta)\right] P(s,\theta)U(s,\theta) \,.
\end{aligned}$$

Questo prova (2.8).

Se osserviamo che $P(s,\bar{\theta}) = P(s,\theta)^*$, tenendo presente che per (2.4) risulta

$$\frac{\partial U}{\partial s}(s,\bar{\theta}) = \left[\frac{dP}{ds}(s,\bar{\theta}), P(s,\bar{\theta})\right] U(s,\bar{\theta}) \,,$$

otteniamo

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial s}\langle U(s,\bar{\theta})\psi(\bar{\theta}), U(s,\theta)\psi(\theta)\rangle \\
&=\left\langle \left[\frac{dP}{ds}(s,\bar{\theta}), P(s,\bar{\theta})\right] U(s,\bar{\theta})\psi(\bar{\theta}), U(s,\theta)\phi(\theta)\right\rangle \\
&=\left\langle U(s,\bar{\theta})\psi(\bar{\theta}), \left[\frac{dP}{ds}(s,\theta), P(s,\theta)\right] U(s,\theta)\phi(\theta)\right\rangle = 0 \,,
\end{aligned}$$

giacchè $\left[\frac{dP}{ds}(s,\bar{\theta}), P(s,\bar{\theta})\right]^* = \left[P(s,\theta), \frac{dP}{ds}(s,\theta)\right]$.

Per provare l'esistenza della soluzione del problema (2.4), lo trasformiamo in uno a coefficienti costanti esprimendolo nel sistema corotante. Indichiamo con L_1 la componente lungo l'asse $x_1$del momento angolare

$$L_1 = -i\hbar\left(x_2\frac{\partial}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial}{\partial x_2}\right) \tag{2.9}$$

e con $S(s)$ il gruppo unitario

$$S(s) = e^{-i\frac{s}{\hbar}L_1} . \tag{2.10}$$

Osserviamo espressamente che gli operatori L_1 ed $S(s)$ sono invarianti per la dilatazione $\mathcal{U}(\theta)$.

La Hamiltoniana dilatata con campo elettrico rotante $H(s,\theta) = H(r(s),\theta)$ (v.(2.2)) si ottiene da

$$\tilde{H}(F,\theta) = -\frac{\hbar^2}{2}e^{-2\theta}\Delta_x - \frac{e^{-\theta}Z}{|x|} + 2e^{\theta}Fx_3 , \tag{3.11}$$

per mezzo dell'operatore $S(s)$

$$S(s)H(s,\theta) = \tilde{H}(F,\theta)S(s) . \tag{2.12}$$

Poniamo

$$\tilde{U}(s,\theta) := S(s)U(s,\theta) , \tag{2.13}$$

allora (2.4) diviene

$$i\frac{\partial\tilde{U}}{\partial s}(s,\theta) = \frac{1}{\hbar}L_1\tilde{U}(s,\theta) + iS(s)\left[\frac{dP}{ds}(s,\theta), P(s,\theta)\right] U(s,\theta) . \tag{2.14}$$

Indicando con $\tilde{P}(F,\theta)$ l'autoproiezione associata all'operatore $\tilde{H}(F,\theta)$; da (2.12) si ottiene

$$\begin{aligned} S(s)P(s,\theta) &= \tilde{P}(F,\theta)S(s) \\ \tilde{P}(F,\theta) &= P(0,\theta) \end{aligned} \tag{2.15}$$

e quindi

$$\frac{\partial S}{\partial s}(s)P(s,\theta) + S(s)\frac{\partial P}{\partial s}(s,\theta) = \tilde{P}(F,\theta)\frac{\partial S}{\partial s}(\tau) . \tag{2.16}$$

D'altra parte la proprietà (2.8) fornisce un'analoga proprietà per gli operatori con la tilde

$$\tilde{P}(F,\theta)\tilde{U}(s,\theta) = \tilde{U}(s,\theta)\tilde{P}(F,\theta) , \tag{2.17}$$

cioè $\tilde{U}(\tau,\theta)$ trasforma il codominio di $\tilde{P}(F,\theta)$ in se stesso. Un semplice calcolo permette di scrivere l'equazione (2.14) sul codominio della proiezione $\tilde{P}(F,\theta)$, dandole la seguente forma

$$i\frac{\partial\tilde{U}}{\partial s}(s,\theta) = \frac{1}{\hbar}\tilde{P}(F,\theta)L_1\tilde{U}(s,\theta). \tag{2.18}$$

Quest'ultima è una equazione a coefficienti costanti, la cui soluzione è ovviamente

$$\tilde{U}(s,\theta) = e^{i\frac{s}{\hbar}\tilde{P}(F,\theta)L_1} . \tag{2.19}$$

Ciò conclude la prova del teorema 2.1.

La formula (2.19) ci consente di calcolare l'olonomia di Berry $U(2\pi,\theta) = \tilde{U}(2\pi,\theta)$: precisamente proveremo che $\tilde{P}(F,\theta)L_1$ si annulla identicamente sul codominio di $\tilde{P}(F,\theta)$

e questo ovviamente comporta che $\tilde{U}(2\pi, \theta) = 1$, ossia la banalità dell'olonomia. Tale prova è ottenuta calcolaldo ciascun termine dello sviluppo perturbativo degli elementi di martice dell'operatore (2.19) nel parametro F e provando poi la sommabilità di Borel di tale serie con i metodi di Hunziker e Vock (1982) e Hunziker e Pillet (1983) (si vedano anche Ramis (1978), (1980) e Auberson Mennessier (1981)); per maggiori particolari si rimanda a Caliceti Marmi Nardini (1992)

BIBLIOGRAFIA

Aguilar J e Combes J M 1971 "A class of analytic perturbation for one body Schrödinger Hamiltonians" *Commun. Math. Phys.* **22** 269–279

Auberson G e Mennessier G 1981 "Some Properties of Borel Summable Functions" *J. Math. Phys.* **22** 2472–2481

Ash J 1990 "On the Classical Limit of Berry's Phase Integrable Systems" *Commun. Math. Phys.* **127** 637–651

Avron J E, Seiler R e Yaffe L G 1987 "Adiabatic theorems and applications to the quantum Hall Effect" *Commun. Math. Phys.* **110** 33–49

Balslev E e Combes J M 1971 "Special properties of many body Schrödinger operators with dilation analytic interactions" *Commun. Math. Phys.* **22**, 280–294

Béletski V 1977 *Essais sur le mouvement des corps cosmiques* Mir, Moscow

Berry M V 1984 "Quantal Phase Factors Accompanying Adiabatic Changes" *Proc. Roy. Soc. London* **A392** 45–57

Berry M V 1985 "Classical Adiabatic Angles and Quantal Adiabatic Phase" *J. Phys. A: Math. Gen.* **18** 15–27

Berry M V 1989 "The Quantum Phase, Five Years After" in *Geometric Phases in Physics*, Shapere A and Wilczek F eds., World Scientific, Singapore, 7–28

Caliceti E, Marmi S e Nardini F 1992 "Absence of Geometrical Phase in the Rotating Stark Effect" in corso di stampa su *Annales Institut H. Poincaré*

Gerard C e Robert D 1989 "On the semiclassical asymptotics of Berry's phase" preprint, Ecole Polytechnique, Paris

Golin S, Knauf A e Marmi S 1989 "The Hannay Angles: Geometry, Adiabaticity and an Example" *Commun. Math. Phys.* **123** 95–122

Golin S e Marmi S 1989 "Symmetries, Hannay angles and precession of orbits" *Europhys. Lett.* **8** 399–404

Golin S e Marmi S 1990 "A class of systems with measurable Hannay angles" *Nonlinearity* **3** 507–518

Gradshteyn I S e Rykhik I M 1980 *Table of integrals, series and products* Academic Press, London

Graffi S e Grecchi V 1978 "Resonances in the Stark effect and perturbation theory" *Commun. Math. Phys* **62** 83–96

Hannay J H 1985 "Angle variable holonomy in adiabatic excursion of an integrable Hamiltonian" *J. Phys. A: Math. Gen.* **18** 221–230

Herbst I W 1979 "Dilation analiticity in constant electric field I. The two body problem" *Commun. Math. Phys.* **64** 279–298

Herbst I W 1982 "Schrödinger operators with external homogeneous electric and magnetic fields" in NATO Advanced Studies Institute, vol 32B, Velo G and Wightman A eds.

Hunziker W 1979 "Schrödinger operators with electric or magnetic fields" in *Mathematical Problems in Theoretical Physics*, Lecture Notes in Physics **116**, Osterwalder K ed., Springer Verlag, Berlin, 25–44

Hunziker W e Pillet C A 1983 "Degenerate Asymptotic Perturbation Theory" *Commun. Math. Phys.* **90** 219–233

Hunziker W e Vock E 1982 "Stability of Schrödinger Eigenvalue Problems" *Comm. Math. Phys.* **83** 281–302

Kato T 1950 "On the adiabatic theorem in quantum mechanics" *J. Phys. Soc. Japan* **5** 435–439

Kato T 1966 *Perturbation Theory for Linear Operators* Springer–Verlag, Berlin

Landau L e Lifchitz E 1966 *Mécanique Quantique* Mir, Moscow

Lochak P e Meunier C 1988 *Multiphase Averaging for Classical Systems With Applications to Adiabatic Theorems* Springer–Verlag, Berlin

Ramis J P 1978 "Dévissage Gevrey" *Astérisque*, **59–60**, 173–204

Ramis J P 1980 "Les séries k–sommables et leurs applications" Springer *Lect. Notes in Phys.* , **126**, 178–199

Reed M e Simon B 1978 *Methods of Modern Mathematical Physics, IV. Analysis of Operators* Academic Press, New York

Simon B 1983 "Holonomy, the quantum adiabatic theorem and Berry's phase" *Phys. Rev. Lett.* **51** 2167–2170

Weinstein A 1990 "Connections of Berry and Hannay type for moving Lagrangian manifolds" *Adv. in Math.* **82** 133–159

Yoshida K 1965 *Functional Analysis* Springer Verlag, Berlin Gottingen Heidelberg